

Datenbanken 1

Relationale Algebra

Nikolaus Augsten
nikolaus.augsten@plus.ac.at
FB Informatik
Universität Salzburg



Sommersemester 2026
Version 22. Mai 2026

Inhalt

- 1 Relationale Algebra
 - Elementare Operatoren
 - Zusätzliche Operatoren
 - Erweiterte Relationale Algebra
 - Relationale Manipulationssprache

Literatur und Quellen

Lektüre zum Thema "Relationale Algebra":

- Kapitel 3 (3.4) aus Kemper und Eickler: Datenbanksysteme: Eine Einführung. 9. Auflage, Oldenbourg Verlag, 2013.
- Kapitel 6 (6.1) aus Silberschatz, Korth, and Sudarashan: Database System Concepts, McGraw Hill, 2011.

Literaturquellen

- Elmasri and Navathe: Fundamentals of Database Systems. Fourth Edition, Pearson Addison Wesley, 2004.

Danksagung Die Vorlage zu diesen Folien wurde entwickelt von:

- Michael Böhlen, Universität Zürich, Schweiz
- Johann Gamper, Freie Universität Bozen, Italien

Inhalt

- 1 Relationale Algebra
 - Elementare Operatoren
 - Zusätzliche Operatoren
 - Erweiterte Relationale Algebra
 - Relationale Manipulationssprache

Relationale Algebra

- Die relationale Algebra ist eine **prozedurale Anfragesprache**.
- Besteht aus **sechs (notwendigen) Operatoren**:
 - Selektion: σ
 - Projektion: π
 - Mengenvereinigung: $\cup$
 - Mengendifferenz: $-$
 - Kartesisches Produkt: $\times$
 - Umbenennung: ρ (Hilfsoperation)
- Die relationale Algebra ist **abgeschlossen**:
 - Argumente der Operatoren sind (ein oder zwei) Relationen.
 - Ergebnis der Operatoren ist wieder eine Relation.

Elementare Operatoren

- Selektion σ
- Projektion π
- Mengenvereinigung $\cup$
- Mengendifferenz $-$
- Kartesisches Produkt $\times$
- Umbenennung ρ

Syntaktische Konventionen

- Es ist hilfreich bei der Namensgebung systematisch zu sein.
- Wir verwenden folgende Regeln.
 - Tabellennamen: Großschreibung und Plural
Beispiele: **Vorlesungen**, **Studenten**, **Module**, **R**, **S**
 - Attributnamen: Großschreibung und Singular
Beispiele: **Semester**, **Jahr**, **Name**, **A**, **B**
 - Konstanten (Werte):
 - Numerische Werte: **12**, **17.6**
 - Zeichenketten: durch Hochkommas begrenzen
Beispiele: **'Martin'**, **'Mehr als ein Wort'**
- Es gibt keinen einheitlichen Standard: verschiedene Lehrbücher verwenden verschiedene Notationen.

Selektion

- Notation:** $\sigma_p(R)$ (sigma)
- Selektionsprädikat** p ist aus folgenden Elementen aufgebaut:
 - Attributnamen der Argumentrelation R oder Konstanten als Operatoren
 - arithmetische Vergleichsoperatoren ($=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$)
 - logische Operatoren: $\wedge$ (**and**), $\vee$ (**or**), $\neg$ (**not**)
- $p(t)$, $t \in R$ heißt: Prädikat p ist für Tupel t aus Relation R erfüllt.
- Definition:** $t \in \sigma_p(R) \Leftrightarrow t \in R \wedge p(t)$
- Beispiel: $\sigma_{FiName='Brugg'}(Konten)$
- Beispiel: $\sigma_{A=B \wedge D > 5}(R)$

R				$\sigma_{A=B \wedge D > 5}(R)$			
A	B	C	D	A	B	C	D
α	α	1	7	α	α	1	7
α	β	5	7	β	β	23	10
β	β	12	3				
β	β	23	10				

Projektion

- **Notation:** $\pi_{A_1, \dots, A_k}(R)$ (π)
- $A_1, A_2, \dots, A_k$ sind Attribute von R und heißen **Projektionsliste**
- **Definition:** $t \in \pi_{A_1, \dots, A_k}(R) \Leftrightarrow \exists x (x \in R \wedge t = x[A_1, \dots, A_k])$, wobei $x[A_1, A_2, \dots, A_k]$ ein neues Tupel bezeichnet, welches für die Werte von A_i , $1 \leq i \leq k$, die Werte der entsprechenden Attribute von x annimmt (alle Attribute A_i müssen in x vorkommen)
- **Beachte:** Allfällige Duplikate (identische Tupel), die sich aus der Projektion ergeben, müssen entfernt werden.
- Beispiel: $\pi_{KoNr, Guthaben}(Konten)$
- Beispiel: $\pi_{A,C}(R)$

R			$\pi_{A,C}(R)$	
A	B	C	A	C
α	10	1	α	1
α	20	1	β	1
β	30	1	β	2
β	40	2		

Mengenvereinigung

- **Notation:** $R \cup S$
- **Definition:** $t \in (R \cup S) \Leftrightarrow t \in R \vee t \in S$
- $R \cup S$ ist nur definiert, wenn r und s das gleiche Schema haben (**union compatible**). Namensdifferenzen können durch explizites Umbenennen der Attribute eliminiert werden (s. weiter unten).
- Beispiel: $\pi_{KuName}(Kontoinhaber) \cup \pi_{KuName}(Kreditnehmer)$
- Beispiel: $R \cup S$

R		S		$R \cup S$	
A	B	A	B	A	B
α	1			α	1
α	2	α	2	α	2
β	1	β	3	β	1
				β	3

Mengendifferenz

- **Notation:** $R - S$
- **Definition:** $t \in (R - S) \Leftrightarrow t \in R \wedge t \notin S$
- Die Argumentrelationen der Mengendifferenz müssen das **gleiche Schema** haben (union compatible).
- Beispiel: $R - S$

R		S		$R - S$	
A	B	A	B	A	B
α	1			α	1
α	2	α	2	β	1
β	1	β	3		

Kartesisches Produkt (Kreuzprodukt)

- **Notation:** $R \times S$
- **Definition:** $t \in (R \times S) \Leftrightarrow \exists x, y (x \in R \wedge y \in S \wedge t = x \circ y)$
- $\circ$ bezeichnet die Konkatination von Tupeln: $[1, 2] \circ [5] = [1, 2, 5]$
- Die Attribute von R und S müssen **unterschiedliche Namen** haben.
- Beispiel: $R \times S$

R		S			$R \times S$				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
α	1	α	10	a	α	1	α	10	a
α	2	β	10	a	α	1	β	10	a
β	1	α	20	b	α	2	α	10	a
β	2	β	10	b	β	2	α	10	a
		γ	10	b	β	2	β	10	a
					β	2	γ	10	b
					β	2	γ	10	b

Umbenennung

- Erlaubt es den **Namen der Relation und der Attribute** eines algebraischen Ausdrucks E zu spezifizieren.
- Wird auch verwendet um **Namenskonflikte aufzulösen** (z.B., in Mengenvereinigung oder Kreuzprodukt)
- Verschiedene **Variationen** (E ist ein relationaler Ausdruck):
 - $\rho_R(E)$ ist eine Relation mit Namen R .
 - $\rho_{R[A_1, \dots, A_k]}(E)$ ist eine Relation mit Namen R und Attributnamen $A_1, \dots, A_k$.
 - $\rho_{[A_1, \dots, A_k]}(E)$ ist eine Relation mit Attributnamen $A_1, \dots, A_k$.
- Beispiel: $\rho_{S[X, Y, U, V]}(R)$

R				S			
A	B	C	D	X	Y	U	V
α	α	1	7	α	α	1	7
β	β	23	10	β	β	23	10

Zusammengesetzte Ausdrücke

- **Geschachtelte Ausdrücke:** Da die relationale Algebra abgeschlossen ist, d.h. das Resultat eines Operators der relationalen Algebra ist wieder eine Relation, ist es möglich Ausdrücke zu schachteln.
- Beispiel: $\sigma_{A=C}(R \times S)$

R		S			$R \times S$					$\sigma_{A=C}(R \times S)$				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
α	1	α	10	a	α	1	α	10	a	α	1	α	10	a
α	1	β	10	a	α	1	β	10	a					
α	1	β	20	b	α	1	β	20	b					
β	1	γ	10	b	β	1	γ	10	b					
β	2	α	10	a	β	2	α	10	a	β	2	α	10	a
β	2	β	10	a	β	2	β	10	a					
β	2	β	20	b	β	2	β	20	b					
β	2	γ	10	b	β	2	γ	10	b	β	2	γ	10	b

Integrierte Übung 4.1

- Identifizieren und korrigieren Sie Fehler in den nachfolgenden relationalen Algebra Ausdrücken. Relation R hat Schema $sch(R) = [A, B]$.
- $\sigma_{R.A > 5}(R)$
- $\sigma_{A, B}(R)$
- $R \times R$

Integrierte Übung 4.2

- Identifizieren und korrigieren Sie Fehler in den nachfolgenden relationalen Algebra Ausdrücken. Relation $Pers$ hat Schema $sch(Pers) = [Name, Alter, Stadt]$.
- $\sigma_{Name = 'Name'}(Pers)$
- $\sigma_{Stadt = Zuerich}(Pers)$
- $\sigma_{Alter > '20'}$

Beispiel: Banken

Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
 Kunden[KuName, Strasse, Ort]
 Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
 Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
 Kontoinhaber[KuName, KoNr]
 Kreditnehmer[KuName, KrNo]

Fremdschlüssel:

- $\pi_{\text{FiName}}(\text{Konten}) \subseteq \pi_{\text{FiName}}(\text{Filialen})$
- $\pi_{\text{FiName}}(\text{Kredite}) \subseteq \pi_{\text{FiName}}(\text{Filialen})$
- $\pi_{\text{KuName}}(\text{Kontoinhaber}) \subseteq \pi_{\text{KuName}}(\text{Kunden})$
- $\pi_{\text{KoNr}}(\text{Kontoinhaber}) \subseteq \pi_{\text{KoNr}}(\text{Konten})$
- $\pi_{\text{KuName}}(\text{Kreditnehmer}) \subseteq \pi_{\text{KuName}}(\text{Kunden})$
- $\pi_{\text{KrNo}}(\text{Kreditnehmer}) \subseteq \pi_{\text{KrNr}}(\text{Kredite})$

Anfragebeispiele/1

- Jene Kredite die größer als \$1200 sind.

$\sigma_{\text{Betrag} > 1200}(\text{Kredite})$

- Die Nummern jener Kredite die größer als \$1200 sind.

$\pi_{\text{KrNr}}(\sigma_{\text{Betrag} > 1200}(\text{Kredite}))$

- Die Namen aller Kunden die einen Kredit oder ein Konto (oder beides) haben.

$\pi_{\text{KuName}}(\text{Kreditnehmer}) \cup \pi_{\text{KuName}}(\text{Kontoinhaber})$

Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
 Kunden[KuName, Strasse, Ort]
 Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
 Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
 Kontoinhaber[KuName, KoNr]
 Kreditnehmer[KuName, KrNo]

Anfragebeispiele/2

- Die Namen aller Kunden die einen Kredit bei der Brugg Filiale haben.

- Anfrage 1

$\pi_{\text{KuName}}(\sigma_{\text{FiName} = \text{'Brugg'}}(\sigma_{\text{KrNo} = \text{KrNr}}(\text{Kreditnehmer} \times \text{Kredite})))$

- Anfrage 2

$\pi_{\text{KuName}}(\sigma_{\text{KrNo} = \text{KrNr}}(\sigma_{\text{FiName} = \text{'Brugg'}}(\text{Kredite})) \times \text{Kreditnehmer}))$

Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
 Kunden[KuName, Strasse, Ort]
 Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
 Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
 Kontoinhaber[KuName, KoNr]
 Kreditnehmer[KuName, KrNo]

Anfragebeispiele/3

- Die Namen aller Kunden die einen Kredit bei der Brugg Filiale haben, aber kein Konto bei der Bank.

$\pi_{\text{KuName}}(\sigma_{\text{FiName} = \text{'Brugg'}}(\sigma_{\text{KrNo} = \text{KrNr}}(\text{Kreditnehmer} \times \text{Kredite})))$
 $-$
 $\pi_{\text{KuName}}(\text{Kontoinhaber})$

Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
 Kunden[KuName, Strasse, Ort]
 Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
 Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
 Kontoinhaber[KuName, KoNr]
 Kreditnehmer[KuName, KrNo]

Integrierte Übung 4.3

- Gegeben: Relation $R[A] = \{[1], [2], [3]\}$. Schreiben Sie einen relationalen Algebra Ausdruck der den größten Wert in R bestimmt.

Definition von relationalen Algebra Ausdrücken

- Ein **elementarer Ausdruck** der relationalen Algebra **ist eine Relation** in der Datenbank (z.B. Konten).
- Falls E_1 und E_2 relationale Algebra Ausdrücke sind, dann lassen sich weitere **relationale Algebra Ausdrücke** wie folgt bilden:
 - $E_1 \cup E_2$
 - $E_1 - E_2$
 - $E_1 \times E_2$
 - $\sigma_p(E_1)$, p ist ein Prädikat in E_1
 - $\pi_s(E_1)$, s ist eine Liste mit Attributen aus E_1
 - $\rho_x(E_1)$, x ist der Name für E_1

Notationsvarianten der Relationalen Algebra

- Im Laufe der Zeit sind **unterschiedliche Notationen** entstanden.
- Notation von Kemper&Eikler (Lehrbuch) unterscheidet sich wie folgt.
- **Qualifizierte Attributnamen**
 - Attributnamen werden durch Voranstellen des Relationsnamen eindeutig gemacht (wo nötig), z.B., $R.B$, $S.B$
 - Kreuzprodukt $R \times S$ ist auch dann erlaubt, wenn R und S gleichnamige Attribute haben
 - Beispiele: Gegeben $R[A, B]$, $S[B, C]$
 - $sch(R \times S) = [A, R.B, S.B, C]$
 - $\sigma_{R.B=S.B}(R \times S)$ ist syntaktisch korrekt
- **Umbenennung mit Zuordnung**
 - Syntax von ρ unterscheidet sich für Relationen und Attribute
 - Relation: $\rho_R(E)$ benennt relationalen Ausdruck E mit R
 - Attribut: $\rho_{A \leftarrow B}(R)$ benennt Attribut A zu B um ($A \in sch(R)$)

In der Prüfung ist die Notation aus der Vorlesung zu verwenden.

Zusammenfassung: Elementare Operatoren

- Relationale Algebra ist **prozedural** und **abgeschlossen**.
- **Elementare Operatoren**:
 - unär: Selektion σ , Projektion π , Umbenennung ρ
 - binär: Mengenvereinigung $\cup$, Mengendifferenz $-$, Kreuzprodukt $\times$
- Ein **relationaler Ausdruck** kann sein:
 - ein elementarer Ausdruck (Relation)
 - eine Kombination von relationalen Ausdrücken, die über relationale Operatoren verbunden sein müssen

Zusätzliche Operatoren der Relationalen Algebra

- Neben den elementaren Operatoren gibt es **zusätzliche Operatoren**:
 - Mengendurchschnitt $\cap$
 - Join $\bowtie$
 - Zuweisung $\leftarrow$
- Die zusätzlichen Operatoren machen Algebra **nicht ausdrucksstärker**:
 - man kann die zusätzlichen Operatoren mithilfe der elementaren Operatoren ausdrücken
 - deshalb sind die zusätzlichen Operatoren *redundant*
- Formulierung** häufiger Anfragen wird zum Teil erheblich **vereinfacht**.

Mengendurchschnitt

- Notation: $R \cap S$
- Definition: $t \in (R \cap S) \Leftrightarrow t \in R \wedge t \in S$
- Voraussetzung: R und S haben das gleiche Schema
- Beachte: $R \cap S = R - (R - S)$
- Beispiel: $R \cap S$

R		S		$R \cap S$	
A	B	A	B	A	B
α	1	α	2	α	2
α	2	β	3		
β	1				

Theta Join (Verbund)/1

- Notation: $R \bowtie_{\theta} S$
- Annahme: R und S sind Relationen. θ ist ein Prädikat über den Attributen von R und S .
- $R \bowtie_{\theta} S$ ist eine Relation mit einem Schema das aus allen Attributen von $sch(R)$ und allen Attributen von $sch(S)$ besteht.
- Beachte: $R \bowtie_{\theta} S = \sigma_{\theta}(R \times S)$
- Beispiel:
 - $sch(R) = [A, B, D]$ und $sch(S) = [X, Y, Z]$
 - $R \bowtie_{A=Z} S$
 - Schema des Resultats ist $[A, B, D, X, Y, Z]$
 - Äquivalent zu: $\sigma_{A=Z}(R \times S)$

R			S			$R \bowtie_{A=Z} S$					
A	B	D	X	Y	Z	A	B	D	X	Y	Z
α	1	a	1	a	α	α	1	a	1	a	α
β	2	a	3	a	β	β	2	a	3	a	β
γ	4	b	3	b	ϵ						

Theta Join (Verbund)/2

- Beispiel:
 - $sch(R) = [A, B, D]$ und $sch(S) = [X, Y, Z]$
 - $R \bowtie_{A=Z \wedge B < X} S$
 - Schema des Resultats ist $[A, B, D, X, Y, Z]$
 - Äquivalent zu: $\sigma_{A=Z \wedge B < X}(R \times S)$

R			S			$R \bowtie_{A=Z \wedge B < X} S$					
A	B	D	X	Y	Z	A	B	D	X	Y	Z
1	a	α	1	a	α						
3	a	β	3	a	β						
3	b	ϵ	3	b	ϵ						

Natürlicher Join

- Notation: $R \bowtie S$
- Annahme: R und S sind Relationen.
- Der natürliche Join verlangt, dass Attribute die sowohl in R als auch in S vorkommen identische Werte haben.
- Das Resultat von $R \bowtie S$ ist eine Relation mit einem Schema das alle Attribute von R enthält und alle Attribute von S die nicht in R vorkommen.
- Beispiel:
 - $R \bowtie S$ mit $sch(R) = [A, B, D]$ und $sch(S) = [B, D, E]$
 - Schema des Resultats ist $[A, B, D, E]$
 - Äquivalent zu: $\pi_{A,B,D,E}(\sigma_{B=Y \wedge D=Z}(R \times \rho_{[Y,Z,E]}(S)))$

R			S			$R \bowtie S$			
A	B	D	B	D	E	A	B	D	E
α	1	a	1	a	α	α	1	a	α
β	2	a	3	a	β				

Semi- und Anti-Join

- **Semi-Join:** $R \ltimes S$
 - alle Tupel von R die in einem natürlichen Join mit S **mindestens einen** Join-Partner finden.
 - $R \ltimes S = \pi_{sch(R)}(R \bowtie S)$
- **Anti-Join:** $R \rhd S$
 - alle Tupel von R die in einem natürlichen Join mit S **keinen** Join-Partner finden.
 - $R \rhd S = R - (R \ltimes S)$

Zuweisung

- Die **Zuweisung** ($\leftarrow$) erlaubt es, komplexe Ausdrücke in kleinere übersichtliche Blöcke aufzubrechen.
 - links von $\leftarrow$ steht eine Variable
 - rechts von $\leftarrow$ steht ein relationaler Algebra Ausdruck
 - das Resultat rechts von $\leftarrow$ wird der Variablen links von $\leftarrow$ zugewiesen
 - komplexe Ausdrücke werden als Sequenz von Zuweisungen geschrieben

Bankbeispiel Anfragen/1

- Das Konto (bzw. die Konten) mit dem höchsten Kontostand.
- Lösung:

Filialen	[FiName, Stadt, Umsatz]
Kunden	[KuName, Strasse, Ort]
Konten	[KoNr, FiName, Guthaben]
Kredite	[KrNr, FiName, Betrag]
Kontoinhaber	[KuName, KoNr]
Kreditnehmer	[KuName, KrNo]

1. Bestimmen jener Konten die **nicht** den höchsten Kontostand haben (indem man jedes Konto mit allen anderen Konten vergleicht)

$$K \leftarrow \pi_{KoNr}(\sigma_{Guthaben < Guth}(Konten \times \rho_{[Nr, Fil, Guth]}(Konten)))$$

2. Mit Hilfe der Mengendifferenz werden jene Konten bestimmt die im ersten Schritt nicht gefunden wurden.

$$Result \leftarrow \pi_{KoNr}(Konten) - K$$

Bankbeispiel Anfragen/2

Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
 Kunden[KuName, Strasse, Ort]
 Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
 Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
 Kontoinhaber[KuName, KoNr]
 Kreditnehmer[KuName, KrNo]

- Alle Kunden die sowohl ein Konto als auch einen Kredit haben.

$$\pi_{KuName}(Kreditnehmer) \cap \pi_{KuName}(Kontoinhaber)$$

- Name und Kreditbetrag aller Kunden die einen Kredit haben.

$$\text{Lösung 1: } \pi_{KuName, Betrag}(Kreditnehmer \bowtie_{KrNo=KrNr} Kredite)$$

$$\text{Lösung 2: } \pi_{KuName, Betrag}(\rho_{[KuName, KrNr]}(Kreditnehmer) \bowtie Kredite)$$

Bankbeispiel Anfragen/3

Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
 Kunden[KuName, Strasse, Ort]
 Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
 Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
 Kontoinhaber[KuName, KoNr]
 Kreditnehmer[KuName, KrNo]

- Kunden die sowohl ein Konto bei der Filiale Chur als auch der Filiale Lanquart haben.

- Lösung:

$$\pi_{KuName}(\sigma_{FiName='Chur'}(Kontoinhaber \bowtie Konten))$$

$\cap$

$$\pi_{KuName}(\sigma_{FiName='Lanquart'}(Kontoinhaber \bowtie Konten))$$

Zusammenfassung: Zusätzliche Operatoren

- Zusätzliche Operatoren** der relationalen Algebra:
 - Mengendurschnitt $\cap$
 - Join (theta, natural) $\bowtie$
 - Zuweisung $\leftarrow$
- Zusätzliche Operatoren **verändern nicht die Ausdruckstärke** der relationalen Algebra, vereinfachen aber die Anfragen.
- Besonders der **Join** Operator spielt eine große Rolle in der **effizienten Implementierung** der relationalen Algebra in Systemen.

Operatoren der Erweiterten Relationalen Algebra

Die erweiterten Operatoren **erhöhen die Ausdruckstärke** der relationalen Algebra.

- Verallgemeinerte Projektion π
- Gruppierung und Aggregation γ
- Äußerer Join (outer join) $\bowtie_{\text{outer}}$, $\bowtie_{\text{left}}$, $\bowtie_{\text{right}}$

Verallgemeinerte Projektion

- Erlaubt **arithmetische Funktionen** in der Projektionsliste:

$$\pi_{F_1, F_2, \dots, F_n}(E)$$

- E ist ein relationaler Ausdruck.
- $F_1, F_2, \dots, F_n$ sind jeweils arithmetische Ausdrücke, welche Konstanten und Attribute des Schemas von E enthalten.
- Beispiel:** Gegeben eine Relation $Kredite[Kunde, Limit, KreditBetrag]$, finde heraus, wieviel jeder Kunde noch ausgeben darf:

$$\pi_{Kunde, Limit - KreditBetrag}(Kredite)$$

Gruppierung

- Partitionierung der Tupel** einer Relation gemäß ihrer Werte in einem oder mehreren Attributen.
- Gruppe** (Partition): Alle Tupel mit identischen Werten in allen Gruppierungsattributen.
- Hauptzweck:** Aggregation auf Teilen einer Relation (Gruppen)
- Beispiel:** Gegeben Relation $R = \{[1, 2, 3], [1, 2, 5], [1, 4, 3], [2, 3, 5], [2, 4, 5]\}$ mit Schema $sch(R) = [A, B, C]$.
 - Gruppierung nach Attribut A ergibt die Gruppen $\{[1, 2, 3], [1, 2, 5], [1, 4, 3]\}$ und $\{[2, 3, 5], [2, 4, 5]\}$
 - Gruppierung nach den Attributen A, C ergibt die Gruppen $\{[1, 2, 3], [1, 4, 3]\}$, $\{[1, 2, 5]\}$, $\{[2, 3, 5], [2, 4, 5]\}$

Aggregationsfunktionen

- Aggregationsfunktionen** erhalten eine Multimenge von Werten als Argument und liefern als Ergebnis einen einzigen Funktionswert.
 - avg:** Durchschnitt
 - min:** kleinster Wert
 - max:** größter Wert
 - sum:** Summe aller Werte
 - count:** Anzahl der Werte (Kardinalität der Menge/Multimenge)
- Elemente der Argumentmenge und Funktionswert sind **atomar**, nicht Tupel.
- Multimenge** (Menge mit Duplikaten): k -fache Werte gehen k -fach in die Berechnung ein.
- Beispiele:** ($\{\dots\}_m$ ist eine Multimenge)
 - $\min(\{3, 1, 5, 5\}_m) = 1$
 - $\text{count}(\{3, 1, 5, 5\}_m) = 4$
 - $\text{avg}(\{3, 1, 5, 5\}_m) = 3.5$

Gruppierungsoperator

- Die **Gruppierung** der relationalen Algebra:

$$\gamma_{G_1, G_2, \dots, G_m; F_1(A_1), F_2(A_2), \dots, F_n(A_n)}(R)$$

R ist eine Relation:

- Gruppierungsattribute: $G_1, G_2, \dots, G_m$ ist eine Liste von Attributen aus R , über die gruppiert wird (kann leer sein)
- Aggregationsfunktionen: F_i ist eine Aggregationsfunktion
- Aggregierte Attribute: A_i ist ein Attribut von R
- Leere Attributliste:** Gruppe besteht aus der gesamten Relation R .
- Ergebnis:** Relation mit $m + n$ Attributen
 - Anzahl der Tupel entspricht Anzahl der Gruppen (ein Tupel pro Gruppe)
 - die Werte der ersten m Attribute des Tupels einer Gruppe entsprechen $G_1, G_2, \dots, G_m$ (Wert gleich für alle Tupel in der Gruppe)
 - die letzten n Attribute entsprechen den Funktionsergebnissen von F_i über die (Multi-)menge aller Werte von A_i in der Gruppe

Beispiel: Gruppierungsoperator

- Relation R , $Res \leftarrow \rho_{[SumC]}(\gamma_{sum(C)}(R))$

R		
A	B	C
α	α	7
α	β	7
β	β	3
β	β	10

Res	
sumC	
27	

- Gesamteinlagen pro Filiale:

$$Res \leftarrow \rho_{[FiName, SumEinlagen]}(\gamma_{FiName; sum(Guthaben)}(Konten))$$

Konten		
FiName	KoNr	Guthaben
Perryridge	A-102	400
Perryridge	A-201	900
Brighton	A-217	750
Brighton	A-215	750
Redwood	A-222	700

Res	
FiName	SumEinlagen
Perryridge	1300
Brighton	1500
Redwood	700

Äußerer Join (Outer Join)

- Erweiterung des Join Operators, welche Informationsverlust verhindert.
- Berechnet Join und fügt die Tupel, die keinen Join-Partner haben, zum Join-Ergebnis hinzu.
- Varianten:
 - (Voller) äußerer Join ($R \bowtie S$): erhält Tupel von R und S
 - Linker äußerer Join ($R \ltimes S$): erhält nur Tupel von R (linke Relation)
 - Rechter äußerer Join ($R \rtimes S$): erhält nur Tupel von S (rechte Relation)
- Verwendet **null Werte**, um die neuen Attribute der Tupel ohne Join-Partner zu füllen.
- Analog zum "normalen" (inneren) Join gibt es einen **natürlichen** und einen **theta** äußeren Join.

Beispiel: Äußerer Join/1

- Beispiel Relationen:

Kredite		
KrNr	FiName	Betrag
L-170	Downtown	3000
L-230	Redwood	4000
L-260	Perryridge	1700

Kreditnehmer	
KuName	KrNr
Jones	L-170
Smith	L-230
Hayes	L-155

- Join (auch "innerer" Join genannt)

$$Kredite \bowtie Kreditnehmer$$

KrNr	FiName	Betrag	KuName
L-170	Downtown	3000	Jones
L-230	Redwood	4000	Smith

Beispiel: Äußerer Join/2

- Beispiel Relationen:

Kredite		
KrNr	FiName	Betrag
L-170	Downtown	3000
L-230	Redwood	4000
L-260	Perryridge	1700

Kreditnehmer	
KuName	KrNr
Jones	L-170
Smith	L-230
Hayes	L-155

- Linker äußerer Join (erhält Tupel der linken Relation)

$$Kredite \ltimes Kreditnehmer$$

KrNr	FiName	Betrag	KuName
L-170	Downtown	3000	Jones
L-230	Redwood	4000	Smith
L-260	Perryridge	1700	null

Beispiel: Äußerer Join/3

- Beispiel Relationen:

Kredite

KrNr	FiName	Betrag
L-170	Downtown	3000
L-230	Redwood	4000
L-260	Perryridge	1700

Kreditnehmer

KuName	KrNr
Jones	L-170
Smith	L-230
Hayes	L-155

- Rechter äußerer Join (erhält Tupel der rechten Relation)

Kredite $\bowtie_r$ Kreditnehmer

KrNr	FiName	Betrag	KuName
L-170	Downtown	3000	Jones
L-230	Redwood	4000	Smith
L-155	null	null	Hayes

Beispiel: Äußerer Join/4

- Beispiel Relationen:

Kredite

KrNr	FiName	Betrag
L-170	Downtown	3000
L-230	Redwood	4000
L-260	Perryridge	1700

Kreditnehmer

KuName	KrNr
Jones	L-170
Smith	L-230
Hayes	L-155

- (Vollständiger) äußerer Join (erhält Tupel beider Relationen)

Kredite $\bowtie$ Kreditnehmer

KrNr	FiName	Betrag	KuName
L-170	Downtown	3000	Jones
L-230	Redwood	4000	Smith
L-260	Perryridge	1700	null
L-155	null	null	Hayes

Zusammenfassung: Erweiterte Relationale Algebra

- Erweiterte Relationale Algebra ist **ausdrucksstärker** als elementare relationale Algebra.
- Verallgemeinerte Projektion π** : Arithmetik in Projektionsliste
- Gruppierung und Aggregation γ** : Berechnung über Gruppen von Attributwerten
- Äußerer Join $\bowtie_r$, $\bowtie$, $\bowtie_{\text{full}}$** : Tupel-erhaltender Join

Änderung der Datenbank

- Der Inhalt der Datenbank kann mithilfe folgenden Operatoren verändert werden:
 - Löschen (delete)
 - Einfügen (insert)
 - Ändern (update)
- All diese Operationen verwenden den **Zuweisungsoperator**.

Löschen

- Ausdruck **ähnlich einer Anfrage**, wobei die Ergebnistupel von der Datenbank entfernt werden.
- **Nur ganze Tupel** können entfernt werden; Werte einzelner Attribute können nicht entfernt werden.
- **Löschen** wird in der relationalen Algebra folgendermaßen ausgedrückt:

$$R \leftarrow R - E$$

wobei R eine Relation ist und E ein Ausdruck der relationalen Algebra.

Beispiel: Löschen

```
Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
Kunden[KuName, Strasse, Ort]
Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
Kontoinhaber[KuName, KoNr]
Kreditnehmer[KuName, KrNo]
```

- Lösche alle Konten in der Filiale Domplatz:

$$R_1 \leftarrow \sigma_{FiName='Domplatz'}(Konten)$$

$$Konten \leftarrow Konten - R_1$$

$$R_2 \leftarrow \pi_{KuName, KoNr}(R_1 \bowtie Kontoinhaber)$$

$$Kontoinhaber \leftarrow Kontoinhaber - R_2$$

Einfügen

- Es gibt **zwei Möglichkeiten**, um Daten in die Relation einzufügen:
 - die einzufügenden Tupel explizit angeben
 - eine Anfrage schreiben deren Ergebnis eingefügt werden soll
- **Einfügen** wird in der relationalen Algebra folgendermaßen ausgedrückt:

$$R \leftarrow R \cup E$$

wobei R eine Relation und E ein relationaler Ausdruck sind.

- Wird ein **einzelnes, explizites Tupel** eingefügt, ist E eine konstante Relation die nur ein Tupel enthält.

Beispiel: Einfügen/1

```
Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
Kunden[KuName, Strasse, Ort]
Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
Kontoinhaber[KuName, KoNr]
Kreditnehmer[KuName, KrNo]
```

- Füge folgende Information in die Datenbank ein: Kunde Smith eröffnet ein neues Konto mit Nummer A-973 auf der Domplatz Filiale und legt 1200 EUR ein.

$$Konten \leftarrow Konten \cup \{['A-973', 'Domplatz', 1200]\}$$

$$Kontoinhaber \leftarrow Kontoinhaber \cup \{['Smith', 'A-973']\}$$

Beispiel: Einfügen/2

```

Filialen[FiName, Stadt, Umsatz]
Kunden[KuName, Strasse, Ort]
Konten[KoNr, FiName, Guthaben]
Kredite[KrNr, FiName, Betrag]
Kontoinhaber[KuName, KoNr]
Kreditnehmer[KuName, KrNr]
    
```

- Alle Kreditnehmer der Domplatz Filiale erhalten ein Konto mit 200 EUR Guthaben geschenkt, wobei die Kontonummer des neuen Kontos identisch mit der jeweiligen Kreditnummer ist.

$$R_1 \leftarrow \sigma_{FiName='Domplatz'}(Kreditnehmer \bowtie_{KrNr=KoNr} Kredite)$$

$$Konten \leftarrow Konten \cup \rho_{KoNr, FiName, Guthaben}(\pi_{KrNr, FiName}(R_1) \times \{[200]\})$$

$$Kontoinhaber \leftarrow Kontoinhaber \cup \rho_{KuName, KoNr}(\pi_{KuName, KrNr}(R_1))$$

Änderung

- Änderungen erlauben, einzelne Werte eines Tupels zu ändern, ohne alle Werte ändern zu müssen.
- Kann durch Löschen und Einfügen ausgedrückt werden.
 - in realen Systemen ist die Änderungsoperation jedoch oft viel schneller
 - deshalb gibt es einen eigenen Operator
- In relationaler Algebra werden Änderungen in der Relation R durch Ersetzen der Relation R durch einen relationalen Ausdruck E ausgedrückt:

$$R \leftarrow E$$

- Oft ist E eine erweiterte Projektion über $R[A_1, A_2, \dots, A_n]$:

$$R \leftarrow \rho_{[A_1, A_2, \dots, A_n]} \pi_{F_1, F_2, \dots, F_n}(R)$$

wobei F_i

- entweder A_i ist, falls Attribut A_i nicht geändert werden soll
- oder eine Funktion, die einen neuen Wert für A_i festlegt.

Beispiel: Änderung

- Auszahlung der Zinsen von 5% auf alle Konten:

$$Konten \leftarrow \rho_{[KoNr, FiName, Guthaben]} \pi_{KoNr, FiName, Guthaben * 1.05}(Konten)$$

- Zahle 6% Zinsen für alle Konten mit mehr als 10.000 EUR Guthaben und 5% für alle anderen Konten:

$$Konten \leftarrow$$

$$\rho_{[KoNr, FiName, Guthaben]}($$

$$\pi_{KoNr, FiName, Guthaben * 1.06}(\sigma_{Guthaben > 10000}(Konten)))$$

$$\cup$$

$$\rho_{[KoNr, FiName, Guthaben]}($$

$$\pi_{KoNr, FiName, Guthaben * 1.05}(\sigma_{Guthaben \leq 10000}(Konten)))$$

Zusammenfassung

- Relationale Manipulationssprache
 - Löschen, Einfügen, Ändern
 - Wird durch Zuweisungsoperator ($\leftarrow$) und Ausdrücken der relationalen Algebra ausgedrückt.

Zusammenfassung

Relationale Algebra:

- **Elementare Operatoren:** notwendig
- **Zusätzliche Operatoren:** redundant (können durch elementare Operatoren ausgedrückt werden)
- **Erweiterte Operatoren:** erhöhen die Ausdruckskraft
- **Manipulationssprache:** Zuweisungsoperator und relationale Algebra